

# Algorithmique des graphes

## Cours 1 – Introduction

František Kardoš

[frantisek.kardos@u-bordeaux.fr](mailto:frantisek.kardos@u-bordeaux.fr)

# Organisation de l'UE

12 × 1h20 de cours

12 × 2h40 de TD

# Organisation de l'UE

12 × 1h20 de cours

12 × 2h40 de TD

DS le 6 novembre (semaine 45)

examen mi-décembre (semaine 50 ou 51)

# Organisation de l'UE

12 × 1h20 de cours

12 × 2h40 de TD

DS le 6 novembre (semaine 45)

examen mi-décembre (semaine 50 ou 51)

groupe A1 : Oliver Delmas

groupe A2 : Olivier Baudon

groupe A3 : Adrien Boussicault

groupe A4 : František Kardoš

# Organisation de l'UE

12 × 1h20 de cours

12 × 2h40 de TD

DS le 6 novembre (semaine 45)

examen mi-décembre (semaine 50 ou 51)

groupe A1 : Oliver Delmas

groupe A2 : Olivier Baudon

groupe A3 : Adrien Boussicault

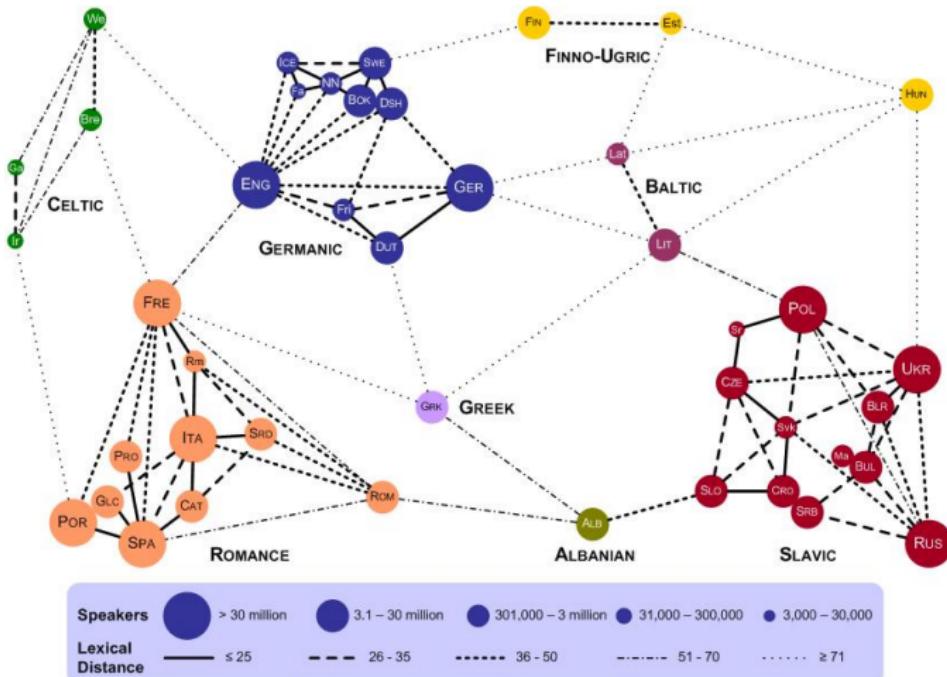
groupe A4 : František Kardoš

[www.labri.fr/perso/fkardos](http://www.labri.fr/perso/fkardos)

# Contenu de l'UE

- ▶ graphes et leurs représentations
- ▶ algorithmes d'exploration
  - ▶ parcours en largeur
  - ▶ parcours en profondeur
- ▶ algorithmes d'optimisation
  - ▶ arbre couvrant le moins cher
  - ▶ calcul de distances (plus court chemin)
  - ▶ optimisation de flots
- ▶ complexité d'algorithmes

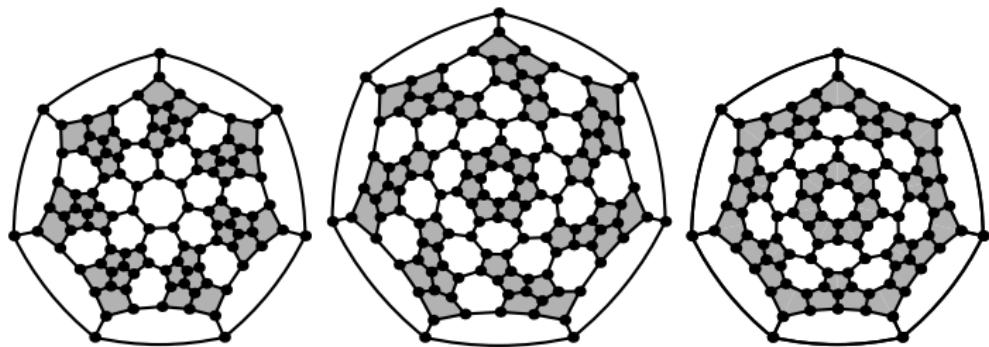
# Qu'est-ce qu'un graphe ?



# Qu'est-ce qu'un graphe ?



# Qu'est-ce qu'un graphe ?



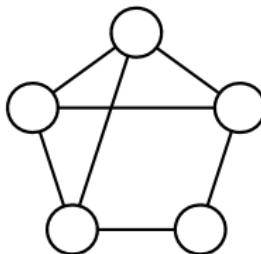
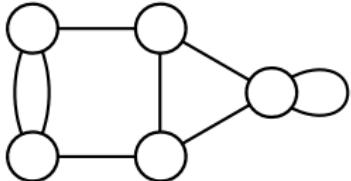
# Graphes – définitions

Un graphe  $G = (V, E)$  est un couple d'ensembles finis, dont

- ▶  $V$  est l'ensemble de *sommets* de  $G$  (représentant des objets), et
- ▶  $E$  est l'ensemble d'*arêtes* de  $G$  (représentant des liens/relations entre des objets).

Une arête relie deux sommets (pas nécessairement distincts).

Si l'arête  $e$  relie les sommets  $u$  et  $v$ , on écrit  $e = uv$ , on dit que  $u$  et  $v$  sont *voisins* ou *adjacents*.



# Graphes – définitions

Pour un graphe  $G$ , on note

- ▶  $V(G)$  l'ensemble des sommets de  $G$
- ▶  $n = |V(G)|$  le nombre de sommets de  $G$  – l'*ordre* de  $G$
- ▶  $E(G)$  l'ensemble des arêtes de  $G$
- ▶  $m = |E(G)|$  le nombre d'arêtes de  $G$  – la *taille* de  $G$

# Graphes – définitions

Une arête reliant un sommet à lui-même est une *boucle*.

Des arêtes reliant la même paire de sommets sont des arêtes parallèles (des arêtes multiples).

Un graphe est dit *simple* s'il n'a ni boucles ni arêtes multiples.

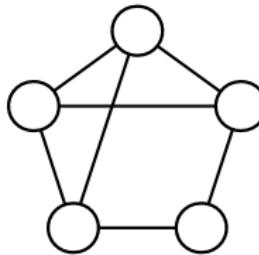
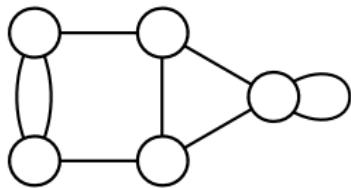
# Graphes – définitions

Une arête reliant un sommet à lui-même est une *boucle*.

Des arêtes reliant la même paire de sommets sont des arêtes parallèles (des arêtes multiples).

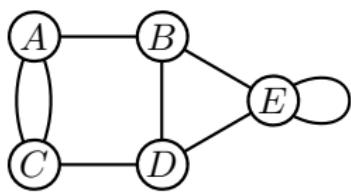
Un graphe est dit *simple* s'il n'a ni boucles ni arêtes multiples.

Y a-t-il un graphe simple parmi ces deux-ci ?



# Graphes – représentations

- ▶ Les listes d'adjacence : pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins ;



$A : [B, C, C]$

$B : [A, D, E]$

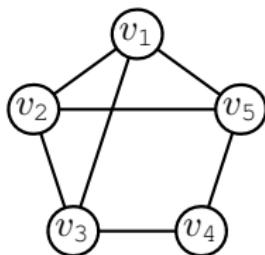
$C : [A, A, D]$

$D : [B, C, E]$

$E : [B, D, E, E]$

# Graphes – représentations

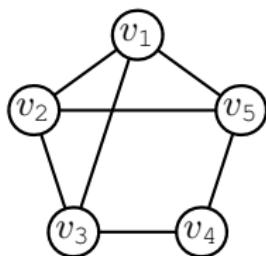
- ▶ Les listes d'adjacence : pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins ;
- ▶ La matrice d'adjacence : pour chaque paire de sommets il est indiqué s'ils sont voisins ou pas ;



	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$v_1$	0	1	1	0	1
$v_2$	1	0	1	0	1
$v_3$	1	1	0	1	0
$v_4$	0	0	1	0	1
$v_5$	1	1	0	1	0

# Graphes – représentations

- ▶ Les listes d'adjacence : pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins ;
- ▶ La matrice d'adjacence : pour chaque paire de sommets il est indiqué s'ils sont voisins ou pas ;
- ▶ La matrice d'incidence : pour chaque sommet et pour chaque arête il est indiqué s'ils sont incidents ou pas.



	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$v_1$	1	1	1	0	0	0	0
$v_2$	1	0	0	1	1	0	0
$v_3$	0	1	0	1	0	1	0
$v_4$	0	0	0	0	0	1	1
$v_5$	0	0	1	0	1	0	1

## Degrés

Le degré  $\deg(v)$  d'un sommet  $v$  est la longueur de la liste d'adjacence de  $v$ .

Dans un graphe simple,  $\deg(v)$  est égal au nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.

## Degrés

Le degré  $\deg(v)$  d'un sommet  $v$  est la longueur de la liste d'adjacence de  $v$ .

Dans un graphe simple,  $\deg(v)$  est égal au nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$v_1$	1	1	1	0	0	0	0
$v_2$	1	0	0	1	1	0	0
$v_3$	0	1	0	1	0	1	0
$v_4$	0	0	0	0	0	1	1
$v_5$	0	0	1	0	1	0	1

Quel est le degré de  $v_2$  ?

# Degrés

## Théorème (lemme des poignées de main)

*Soit  $G$  un graphe. La somme des degrés de sommets de  $G$  est égale au double du nombre d'arêtes de  $G$  :*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

# Degrés

## Théorème (lemme des poignées de main)

*Soit  $G$  un graphe. La somme des degrés de sommets de  $G$  est égale au double du nombre d'arêtes de  $G$  :*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

*Démo. (par double comptage)*

Posons sur chaque sommet du graphe autant de jetons que son degré. Il y a  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$  de jetons au total.

# Degrés

## Théorème (lemme des poignées de main)

*Soit  $G$  un graphe. La somme des degrés de sommets de  $G$  est égale au double du nombre d'arêtes de  $G$  :*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

*Démo. (par double comptage)*

Posons sur chaque sommet du graphe autant de jetons que son degré. Il y a  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$  de jetons au total.  
Tout sommet passe un jeton à toute arête incidente.

# Degrés

## Théorème (lemme des poignées de main)

*Soit  $G$  un graphe. La somme des degrés de sommets de  $G$  est égale au double du nombre d'arêtes de  $G$  :*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

*Démo. (par double comptage)*

Posons sur chaque sommet du graphe autant de jetons que son degré. Il y a  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$  de jetons au total.

Tout sommet passe un jeton à toute arête incidente.

Chaque arête reçoit deux jetons.

# Degrés

## Théorème (lemme des poignées de main)

*Soit  $G$  un graphe. La somme des degrés de sommets de  $G$  est égale au double du nombre d'arêtes de  $G$  :*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

*Démo. (par double comptage)*

Posons sur chaque sommet du graphe autant de jetons que son degré. Il y a  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$  de jetons au total.

Tout sommet passe un jeton à toute arête incidente.

Chaque arête reçoit deux jetons.

Il y a donc  $2m$  jetons, d'où l'égalité.

# Degrés

## Théorème (lemme des poignées de main)

*Soit  $G$  un graphe. La somme des degrés de sommets de  $G$  est égale au double du nombre d'arêtes de  $G$  :*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

# Degrés

## Théorème (lemme des poignées de main)

*Soit  $G$  un graphe. La somme des degrés de sommets de  $G$  est égale au double du nombre d'arêtes de  $G$  :*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

*Démo.* (par double comptage)

# Degrés

## Théorème (lemme des poignées de main)

*Soit  $G$  un graphe. La somme des degrés de sommets de  $G$  est égale au double du nombre d'arêtes de  $G$  :*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

*Démo.* (par double comptage)

$\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$  est la somme des sommes de lignes de la matrice d'incidence de  $G$ ;

# Degrés

## Théorème (lemme des poignées de main)

*Soit  $G$  un graphe. La somme des degrés de sommets de  $G$  est égale au double du nombre d'arêtes de  $G$  :*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

*Démo.* (par double comptage)

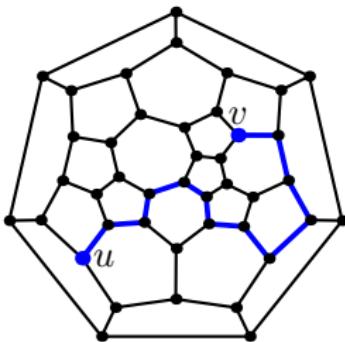
$\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$  est la somme des sommes de lignes de la matrice d'incidence de  $G$ ;

$2m$  est la somme des sommes de colonnes de la dite matrice, d'où l'égalité.

# Chaînes et connexité

Une *chaîne* entre deux sommets  $u$  et  $v$  d'un graphe  $G$  est une séquence d'arêtes consécutives, par exemple  $(u_0u_1, u_1u_2, \dots, u_{k-1}u_k)$ , telle que  $u = u_0$  et  $v = u_k$ .

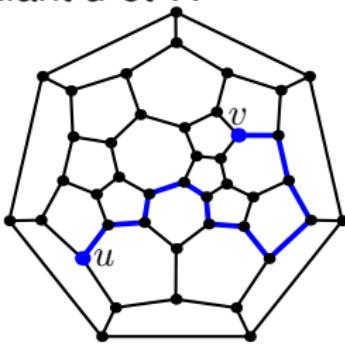
La *longueur* d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent (ici  $k$ ).



# Chaînes et connexité

On dit qu'un sommet  $v$  est *accessible* à partir du sommet  $u$  s'il existe une chaîne reliant  $u$  et  $v$ .

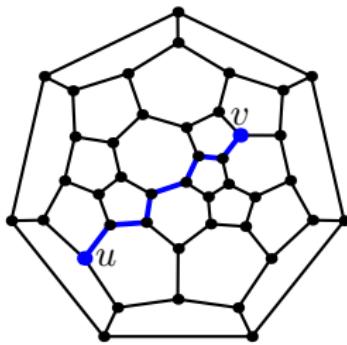
Un graphe est dit *connexe* si ses sommets sont tous accessibles entre eux, i.e., pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$  il existe une chaîne reliant  $u$  et  $v$ .



# Chaînes et connexité

La distance  $dist(u, v)$  entre deux sommets  $u$  et  $v$  du graphe  $G$  est la longueur d'une plus courte chaîne entre  $u$  et  $v$ .

(S'il n'existe pas de chaîne entre ces sommets, la distance est définie comme infinie.)

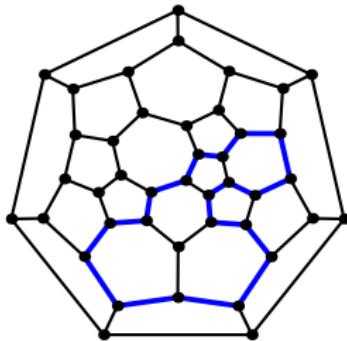


# Cycles et arbres

Une séquence d'arêtes distinctes consécutives reliant un sommet à lui même est appelée un *cycle*; la *longueur* du cycle est le nombre d'arêtes composant le cycle.

Toute boucle est un cycle de longueur 1.

Toute paire d'arêtes parallèles forme un cycle de longueur 2.

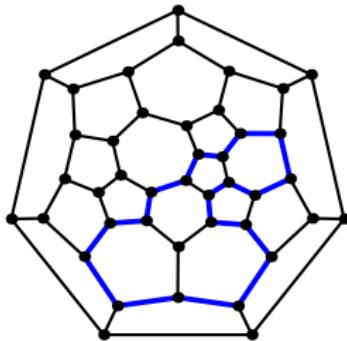


# Cycles et arbres

Une séquence d'arêtes distinctes consécutives reliant un sommet à lui même est appelée un *cycle*; la *longueur* du cycle est le nombre d'arêtes composant le cycle.

Toute boucle est un cycle de longueur 1.

Toute paire d'arêtes parallèles forme un cycle de longueur 2.



Un cycle est dit *élémentaire* s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.

# Cycles et arbres

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle.

Un arbre est-il toujours simple ?

# Cycles et arbres

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle.

Un arbre est-il toujours simple ?

Un graphe  $H$  est un *arbre couvrant* du graphe  $G$  si  $H$  est un arbre que l'on peut obtenir en supprimant des arêtes de  $G$ .

