

Algorithmique des graphes

Cours 1 – Introduction

František Kardoš

`frantisek.kardos@u-bordeaux.fr`

Organisation de l'UE

12 × 1h20 de cours

12 × 2h40 de TD

Organisation de l'UE

12 × 1h20 de cours

12 × 2h40 de TD

DS le 6 novembre (semaine 45)

examen mi-décembre (semaine 50 ou 51)

Organisation de l'UE

12 × 1h20 de cours

12 × 2h40 de TD

DS le 6 novembre (semaine 45)

examen mi-décembre (semaine 50 ou 51)

groupe A1 : Oliver Delmas

groupe A2 : Olivier Baudon

groupe A3 : Adrien Boussicault

groupe A4 : František Kardoš

Organisation de l'UE

12 × 1h20 de cours

12 × 2h40 de TD

DS le 6 novembre (semaine 45)

examen mi-décembre (semaine 50 ou 51)

groupe A1 : Oliver Delmas

groupe A2 : Olivier Baudon

groupe A3 : Adrien Boussicault

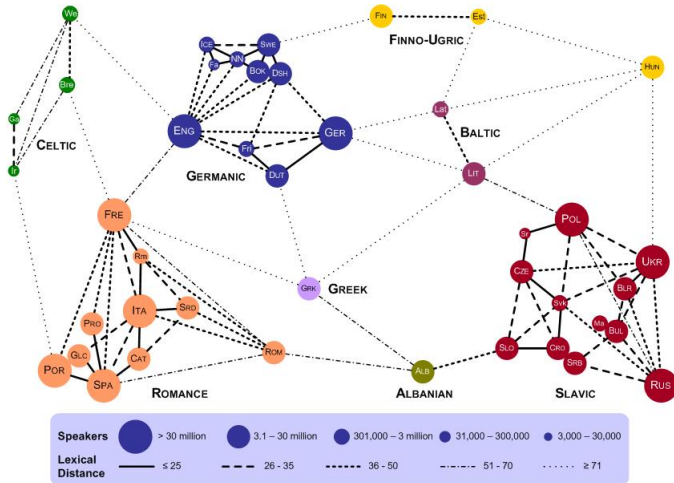
groupe A4 : František Kardoš

www.labri.fr/perso/fkardos

Contenu de l'UE

- ▶ graphes et leurs représentations
- ▶ algorithmes d'exploration
 - ▶ parcours en largeur
 - ▶ parcours en profondeur
- ▶ algorithmes d'optimisation
 - ▶ arbre couvrant le moins cher
 - ▶ calcul de distances (plus courts chemin)
 - ▶ optimisation de flots
- ▶ complexité d'algorithmes

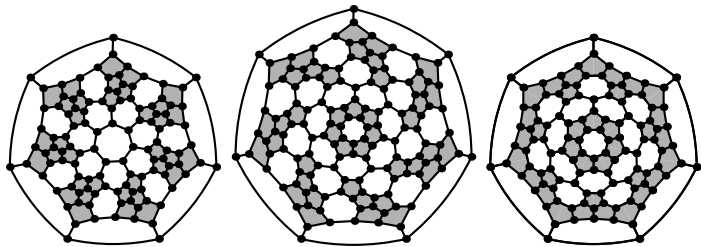
Qu'est-ce qu'un graphe ?



Qu'est-ce qu'un graphe ?



Qu'est-ce qu'un graphe ?

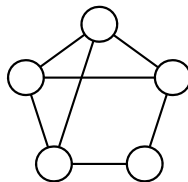
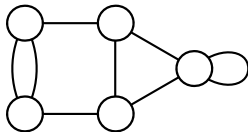


Graphes – définitions

Un graphe $G = (V, E)$ est un couple d'ensembles finis, dont

- ▶ V est l'ensemble de *sommets* de G (représentant des objets), et
- ▶ E est l'ensemble d'*arêtes* de G (représentant des liens/rerelations entre des objets).

Une arête relie deux sommets (pas nécessairement distincts).
Si l'arête e relie les sommets u et v , on écrit $e = uv$, on dit que u et v sont *voisins* ou *adjacents*.



Graphes – définitions

Pour un graphe G , on note

- ▶ $V(G)$ l'ensemble des sommets de G
- ▶ $n = |V(G)|$ le nombre de sommets de G – l'*ordre* de G
- ▶ $E(G)$ l'ensemble des arêtes de G
- ▶ $m = |E(G)|$ le nombre d'arêtes de G – la *taille* de G

Graphes – définitions

Une arête reliant un sommet à lui-même est une *boucle*.

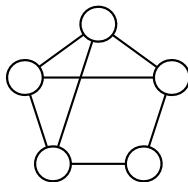
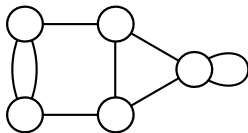
Des arêtes reliant la même paire de sommets sont des arêtes parallèles (des arêtes multiples).

Un graphe est dit *simple* s'il n'a ni boucles ni arêtes multiples.

Graphes – définitions

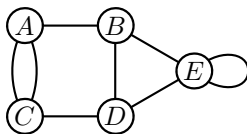
Une arête reliant un sommet à lui-même est une *boucle*.
Des arêtes reliant la même paire de sommets sont des arêtes parallèles (des arêtes multiples).

Un graphe est dit *simple* s'il n'a ni boucles ni arêtes multiples.
Y a-t-il un graphe simple parmi ces deux-ci ?



Graphes – représentations

- Les listes d'adjacence : pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins ;



$A : [B, C, C]$

$B : [A, D, E]$

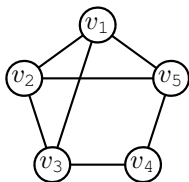
$C : [A, A, D]$

$D : [B, C, E]$

$E : [B, D, E, E]$

Graphes – représentations

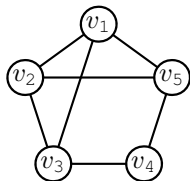
- ▶ Les listes d'adjacence : pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins ;
- ▶ La matrice d'adjacence : pour chaque paire de sommets il est indiqué s'ils sont voisins ou pas ;



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	1	0	1
v_2	1	0	1	0	1
v_3	1	1	0	1	0
v_4	0	0	1	0	1
v_5	1	1	0	1	0

Graphes – représentations

- ▶ Les listes d'adjacence : pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins ;
- ▶ La matrice d'adjacence : pour chaque paire de sommets il est indiqué s'ils sont voisins ou pas ;
- ▶ La matrice d'incidence : pour chaque sommet et pour chaque arête il est indiqué s'ils sont incidents ou pas.



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	1	0	0	0	0
v_2	1	0	0	1	1	0	0
v_3	0	1	0	1	0	1	0
v_4	0	0	0	0	0	1	1
v_5	0	0	1	0	1	0	1

Degrés

Le *degré* $\deg(v)$ d'un sommet v est la longueur de la liste d'adjacence de v .

Dans un graphe simple, $\deg(v)$ est égal au nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.

Degrés

Le *degré* $\deg(v)$ d'un sommet v est la longueur de la liste d'adjacence de v .

Dans un graphe simple, $\deg(v)$ est égal au nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	1	0	0	0	0
v_2	1	0	0	1	1	0	0
v_3	0	1	0	1	0	1	0
v_4	0	0	0	0	0	1	1
v_5	0	0	1	0	1	0	1

Quel est le degré de v_2 ?

Degrés

Théorème (lemme des poignées de main)

Soit G un graphe. La somme des degrés de sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Degrés

Théorème (lemme des poignées de main)

Soit G un graphe. La somme des degrés de sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Démo. (par double comptage)

Posons sur chaque sommet du graphe autant de jetons que son degré. Il y a $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ de jetons au total.

Degrés

Théorème (lemme des poignées de main)

Soit G un graphe. La somme des degrés de sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Démo. (par double comptage)

Posons sur chaque sommet du graphe autant de jetons que son degré. Il y a $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ de jetons au total. Tout sommet passe un jeton à toute arête incidente.

Degrés

Théorème (lemme des poignées de main)

Soit G un graphe. La somme des degrés de sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Démo. (par double comptage)

Posons sur chaque sommet du graphe autant de jetons que son degré. Il y a $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ de jetons au total.

Tout sommet passe un jeton à toute arête incidente.

Chaque arête reçoit deux jetons.

Degrés

Théorème (lemme des poignées de main)

Soit G un graphe. La somme des degrés de sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Démo. (par double comptage)

Posons sur chaque sommet du graphe autant de jetons que son degré. Il y a $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ de jetons au total.

Tout sommet passe un jeton à toute arête incidente.

Chaque arête reçoit deux jetons.

Il y a donc $2m$ jetons, d'où l'égalité.

Degrés

Théorème (lemme des poignées de main)

Soit G un graphe. La somme des degrés de sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Degrés

Théorème (lemme des poignées de main)

Soit G un graphe. La somme des degrés de sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Démo. (par double comptage)

Degrés

Théorème (lemme des poignées de main)

Soit G un graphe. La somme des degrés de sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Démo. (par double comptage)

$\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ est la somme des sommes de lignes de la matrice d'incidence de G ;

Degrés

Théorème (lemme des poignées de main)

Soit G un graphe. La somme des degrés de sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Démo. (par double comptage)

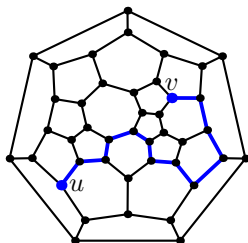
$\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ est la somme des sommes de lignes de la matrice d'incidence de G ;

$2m$ est la somme des sommes de colonnes de la dite matrice, d'où l'égalité.

Chaînes et connexité

Une *chaîne* entre deux sommets u et v d'un graphe G est une séquence d'arêtes consécutives, par exemple $(u_0u_1, u_1u_2, \dots, u_{k-1}u_k)$, telle que $u = u_0$ et $v = u_k$.

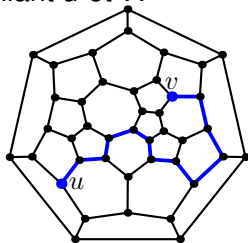
La *longueur* d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent (ici k).



Chaînes et connexité

On dit qu'un sommet v est *accessible* à partir du sommet u s'il existe une chaîne reliant u et v .

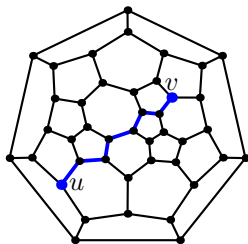
Un graphe est dit *connexe* si ses sommets sont tous accessibles entre eux, i.e., pour toute paire de sommets u et v il existe une chaîne reliant u et v .



Chaînes et connexité

La distance $dist(u, v)$ entre deux sommets u et v du graphe G est la longueur d'une plus courte chaîne entre u et v .

(S'il n'existe pas de chaîne entre ces sommets, la distance est définie comme infinie.)

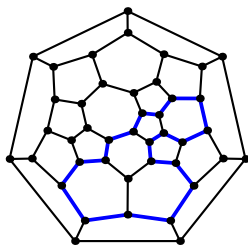


Cycles et arbres

Une séquence d'arêtes distinctes consécutives reliant un sommet à lui même est appelée un *cycle*; la *longueur* du cycle est le nombre d'arêtes composant le cycle.

Toute boucle est un cycle de longueur 1.

Toute paire d'arêtes parallèles forme un cycle de longueur 2.

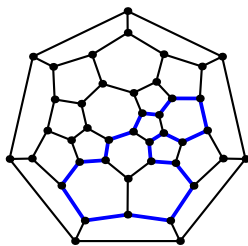


Cycles et arbres

Une séquence d'arêtes distinctes consécutives reliant un sommet à lui même est appelée un *cycle*; la *longueur* du cycle est le nombre d'arêtes composant le cycle.

Toute boucle est un cycle de longueur 1.

Toute paire d'arêtes parallèles forme un cycle de longueur 2.



Un cycle est dit *élémentaire* s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.

Cycles et arbres

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle.

Un arbre est-il toujours simple ?

Cycles et arbres

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle.

Un arbre est-il toujours simple ?

Un graphe H est un *arbre couvrant* du graphe G si H est un arbre que l'on peut obtenir en supprimant des arêtes de G .

